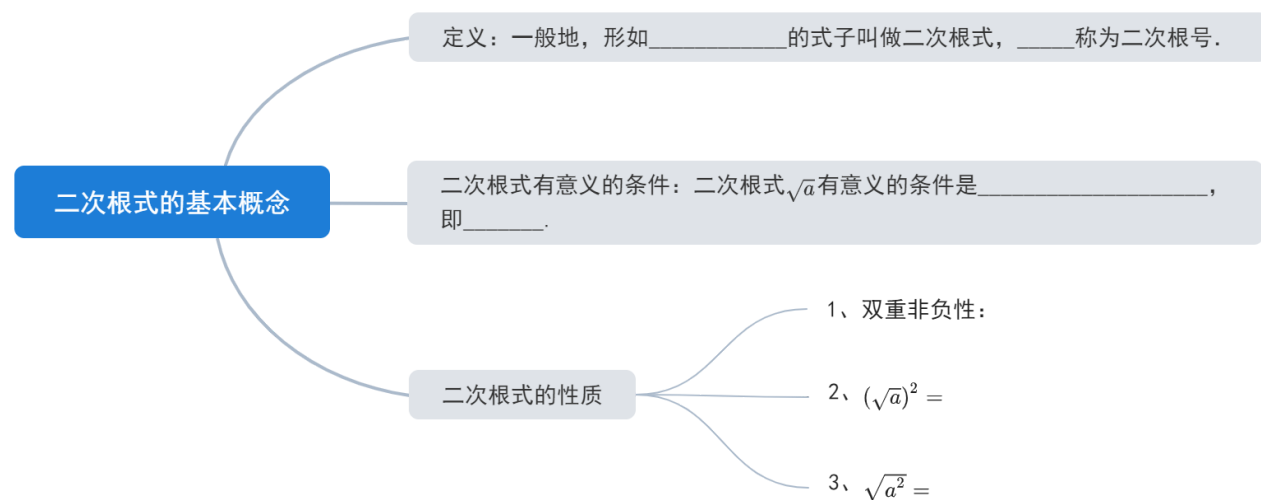


第1讲 二次根式的基本概念与运算

二次根式与勾股定理属于人教版第十六、第十七章的内容，这部分的易错点为二次根式与勾股定理的计算，难点为勾股定理的综合运用，是期中考试的高频考点。本模块《二次根式与勾股定理》，旨在帮助学生巩固二次根式的基本运算与勾股定理的简单应用，为后续《勾股定理进阶》奠定基础。

本模块难度适中，适用于二次根式与勾股定理的基础认知与简单应用，本模块分为二次根式的基本概念与运算、勾股定理与逆定理2讲内容，帮助学生了解二次根式与勾股定理的常见题型，掌握这部分的解题思路。

一、二次根式的基本概念



【教法备注】

1、二次根式的定义：一般地，形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式，“ $\sqrt{\quad}$ ”称为二次根号。

① 从形式上看，二次根式必须含有二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”，如 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{16}$ ， $\sqrt{a^2+1}$ 等都是二次根式。

② 二次根式中，被开方数 a 可以是数，也可以是含有字母的代数式，但 a 的值必须是非负数，否则无意义。如 $\sqrt{(-3)^2}$ ， $\sqrt{-a}$ ($a \leq 0$) 的被开方数是非负数，它们是二次根式，而 $\sqrt{-3}$ ， $\sqrt{-a}$ ($a > 0$) 的被开方数是负数，不是二次根式。

2、二次根式有意义的条件：被开方数大于等于零，即 $a \geq 0$ 。

① 对于单个二次根式只需满足被开方数大于等于零；

② 对于多个二次根式，则是多个被开方数同时大于等于零。

3、二次根式的性质：

① $\sqrt{a} \geq 0$ ($a \geq 0$)，二次根式的双重非负性。

二次根式双重非负性的应用：

(1) 几个非负数之和等于0, 则每个非负数都等于0, 如 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b-3} = 0$, 则 $a+1=0$, $b-3=0$;

(2) $\sqrt{x-a} + \sqrt{a-x}$, 则 x 的取值范围是 $\begin{cases} x-a \geq 0 \\ a-x \geq 0 \end{cases}$, 即 $x=a$.

② $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$.

$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 既可以正向运用, 也可以逆向运用, 正向运用可化简二次根式, 逆向运用可以将任意一个非负数写成一个数的平方.

如: $(\sqrt{2})^2 = 4$, 反过来 $4 = (\sqrt{2})^2$.

③ $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

运用 $\sqrt{a^2} = |a|$ 进行化简时, 一定要结合已知条件或隐含条件先判断被开方数的底数 a 的符号, 然后利用绝对值的性质进行化简.

|| 例题

1. 下列各式是二次根式的是 ().

A. $\sqrt{-7}$

B. $\sqrt{m}$

C. $\sqrt{a^2+1}$

D. $\sqrt[3]{3}$

【答案】C

【解析】二次根式是指被开方数为非负数. A选项的被开方数为负数; B选项中当 $m < 0$ 时则不是二次根式; D选项为三次根式. 故选C.

【标注】【知识点】二次根式的定义

【重点强调】

2018~2019学年4月天津和平区天津市第二十一中学初二下学期月考第1题3分

2. 若 $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ().

A. $x > \frac{1}{2}$

B. $x \geq \frac{1}{2}$

C. $x < \frac{1}{2}$

D. $x > 0$

【答案】A

【解析】 $\because 2x-1 > 0$,
 $\therefore x > \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】分式有意义的条件

【知识点】二次根式有意义的条件

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第3题

练习

3. 下列各式： $\sqrt{a^2+1}$ ， $\sqrt{b+2}(b \geq 2)$ ， $\sqrt{-(3x-1)^2}$ ， $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$ ， $\sqrt{b^2-4ac}$ ，其中是二次根式的个数有() .
- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【答案】 B

【解析】 $\sqrt{a^2+1}$ ， $\sqrt{b+2}(b \geq 2)$ ， $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$ ，符合二次根式的形式，故是二次根式，
 $\sqrt{-(3x-1)^2}$ 的被开方数小于等于0，当小于0时无意义，不是二次根式，
 $\sqrt{b^2-4ac}$ 被开方数不确定，不是二次根式。

【标注】 【知识点】 二次根式有意义的条件

- 4.
- (1) 使式子 $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ 有意义的 x 的取值范围是() .
- A. $x \geq 1$ B. $-1 \leq x \leq 2$ C. $x \leq 2$ D. $-1 < x < 2$
- (2) 式子 $\frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 有意义的 x 的数值范围是() .
- A. $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ B. $x \neq 1$ C. $x \geq -\frac{1}{2}$ D. $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$
- (3) 若式子 $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{x-7}$ 有意义，则 x 的取值范围是() .
- A. $x \neq 3$ B. $x > 3$ C. $x > 3$ 且 $x \neq 7$ D. $x \neq 2$

【答案】 (1) B

(2) A

(3) C

【解析】 (1) $\because \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ 有意义，
 $\therefore x+1 \geq 0$ 且 $2-x \geq 0$ ，
 $\therefore -1 \leq x \leq 2$

(2)

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{\sqrt{2x+1}}{x-1} \text{ 有意义,} \\ &\therefore 2x+1 \geq 0 \text{ 且 } x-1 \neq 0, \\ &\therefore x \geq -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1. \\ (3) &\therefore \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{x-7} \text{ 有意义,} \\ &\therefore x-3 \geq 0, \text{ 且 } x-7 \neq 0, \\ &\therefore x \geq 3 \text{ 且 } x \neq 7. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

例题

5. 若 a 、 b 为实数，且 $b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a-1} + 4$ ，则 $a+b$ 的值为（ ）。
- A. 3 B. 4 C. 3或5 D. 5

【答案】 A

【解析】 $\therefore b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a-1} + 4$ ，
 $\therefore a^2 - 1 = 0$ ，则 $b = 4$ ，
 解得： $a = 1$ （舍去）或 $a = -1$ ，
 $\therefore a + b = 3$ 。

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期月考第4题4分

6. 计算 $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2}$ 的结果是（ ）。
- A. 1 B. -1 C. $2x-5$ D. $5-2x$

【答案】 D

【解析】 由题意要求 $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2}$ 的值，
 $\therefore 2-x \geq 0$ ，
 $\therefore x \leq 2$ ，
 $\therefore x-3 < 0$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(x-3)^2} &= 3-x, \\ \therefore (\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2} &= 2-x+3-x=5-2x.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【能力】运算能力

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期月考第2题4分

7. 若 $\sqrt{x^2-4x+4}+x=2$ ，则 x 的取值范围是（ ）.

A. $x > 2$

B. $x < 2$

C. $x \geq 2$

D. $x \leq 2$

【答案】D

【解析】 $\sqrt{x^2-4x+4}+x=2$ ，
 $\therefore \sqrt{(x-2)^2}=2-x$ ，
 $\therefore |x-2|=2-x$ ，
 $\therefore x-2 \leq 0$ ，
 $\therefore x \leq 2$.

【标注】【知识点】二次根式的性质

8. 已知 $|2020-a|+\sqrt{a-2021}=a$ ，求 $a-2020^2$ 的值.

【答案】2021.

【解析】 $\because a-2021 \geq 0$ ， $\therefore 2020-a < 0$.
 $\therefore$ 原式为： $a-2020+\sqrt{a-2021}=a$ ，
 $\sqrt{a-2021}=2020$ ，
平方得 $a=2020^2+2021$ ，
 $\therefore a-2020^2=2021$.

【标注】【知识点】二次根式的性质

练习

9. 已知实数 x, y 满足 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-2x}+2$ ，求 x^y 的值.

【答案】9.

【解析】 $\because x - 3 \geq 0$,

$$\therefore x \geq 3.$$

$$\text{又} \because 6 - 2x \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 3.$$

$$\therefore x = 3.$$

$$\therefore y = 2.$$

$$\therefore x^y = 3^2 = 9.$$

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

10. 已知 $\sqrt{2a+b^2} + |b^2-9| = 0$, 求 $a+b$ 的值.

【答案】 $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{15}{2}$.

【解析】 $\because \sqrt{2a+b^2} + |b^2-9| = 0$, $\sqrt{2a+b^2} \geq 0$, $|b^2-9| \geq 0$,

$$\therefore \sqrt{2a+b^2} = 0, |b^2-9| = 0,$$

$$\therefore b^2 = 9, 2a = -9,$$

$$\therefore b = \pm 3, a = -\frac{9}{2},$$

$$\text{① } b = 3 \text{ 时, } a+b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{② } b = -3 \text{ 时, } a+b = -\frac{15}{2},$$

$$\text{故 } a+b \text{ 的值是 } -\frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{15}{2}.$$

【标注】【知识点】绝对值的非负性

11. 若 $0 < x < 1$, 化简 $\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}$ 等于 ().

A. $\frac{2}{x}$

B. $-\frac{2}{x}$

C. $-2x$

D. $2x$

【答案】D

【解析】原式 $= \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = x + \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - x\right) = 2x.$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【重点强调】

2017~2018学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第7题

12. 已知 $\sqrt{(x-1000)^2} + (\sqrt{998-x})^2 = 2000$, $y = \sqrt{m+8} + \sqrt{m-1} + \sqrt{1-m}$, 求 $y-x$ 的平方根.

【答案】 ± 2 .【解析】由题意得, $998-x \geq 0$,解得: $x \leq 998$, $\therefore 1000-x + 998-x = 2000$,解得: $x = -1$,由题意得, $m-1 \geq 0$ 且 $1-m \geq 0$,解得: $m \geq 1$ 且 $m \leq 1$, $\therefore m = 1$, $y = \sqrt{1+8} = 3$, $\therefore y-x = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$, $\therefore (\pm 2)^2 = 4$, $\therefore 4$ 的平方根是 ± 2 ,即 $y-x$ 的平方根是 ± 2

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

二、二次根式的运算

💡 二次根式的乘除

二次根式的乘除

二次根式的乘法法则: _____.

二次根式的除法法则: _____.

【教法备注】

1、二次根式的乘法法则: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)

把 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$ 反过来, 就得到 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$, 利用它可以进行二次根式的化简.

二次根式乘法公式的推广:

$$\textcircled{1} \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0);$$

$$\textcircled{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0)$$

$$\textcircled{3} (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}, (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b;$$

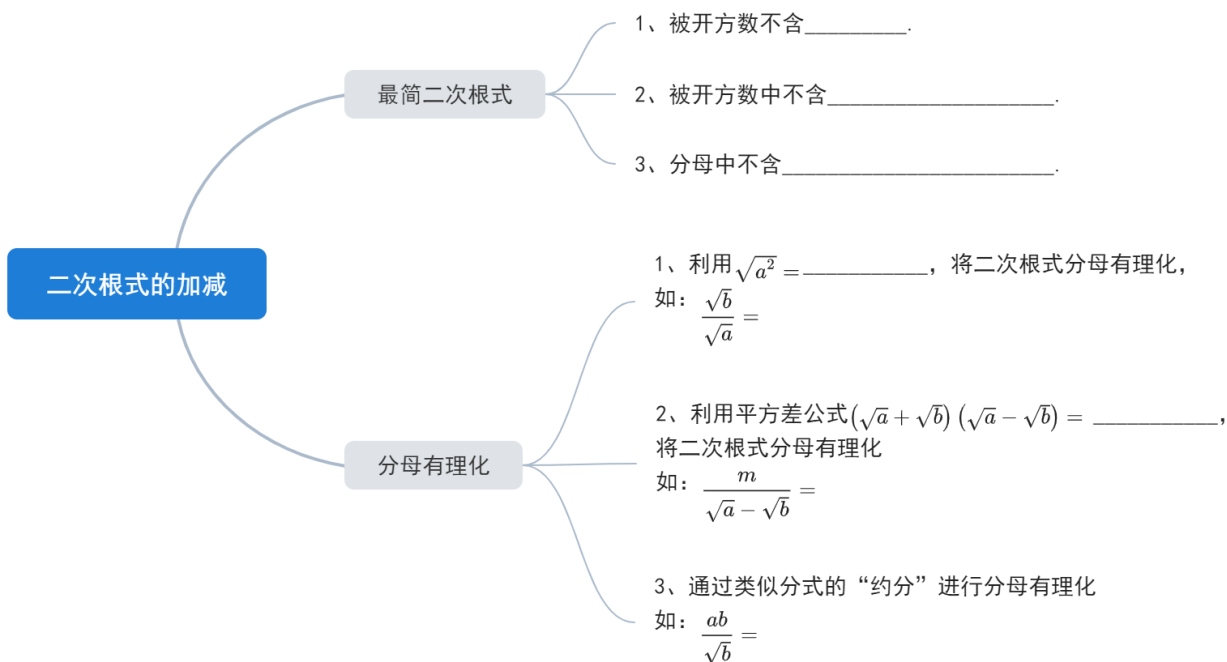
$$\textcircled{4} \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_3} \cdots \sqrt{a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} \quad (a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \cdots, a_n \geq 0)$$

2、二次根式的除法法则: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 逆向运用时, $a \geq 0, b > 0$, 否则是不对的.

如: $\sqrt{\frac{-4}{-9}} = \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}}$ 在实数范围是无意义的.

二次根式有理化



【教法备注】

1、最简二次根式:

如果一个二次根式满足下列几个特点:

- ① 被开方数不含分母.
- ② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.
- ③ 分母中不含二次根式.

我们把这个二次根式叫做最简二次根式.

① 在二次根式的被开方数中，只要含有分数或小数就不是最简二次根式。

② 在二次根式的被开方数中，有幂指数等于或大于2的因式或因数就不是最简二次根式。

③ 一般地，二次根式运算的结果应化为最简二次根式，并且分母中不含二次根式。

2、二次根式分母有理化：二次根式的运算中，最后结果要求分母中不含二次根式。把分母中的根号化去的过程称为分母有理化。

具体过程：

$$\textcircled{1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a} \quad (\text{其中 } b \geq 0, a > 0).$$

实质是利用 $(\sqrt{a})^2 = a$ ，将二次根式分母有理化。

$$\textcircled{2} \frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{m\sqrt{a} + m\sqrt{b}}{a - b}.$$

实质是利用平方差公式 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ，将二次根式分母有理化。

$$\textcircled{3} \text{也可以通过类似分式的“约分”进行分母有理化，如 } \frac{ab}{\sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}} = a\sqrt{b} (b > 0).$$

3、二次根式的变形：

① 二次根式的外移：二次根式的外移的实质是利用 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，将根号里边的完全平方数或（式）开平方。

（1）被开方数中含有开方开得尽方的因数或因式，用它的算术平方根代替移到根号外面

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1-a}{a^2}} = -\frac{\sqrt{1-a}}{a} (a < 0), \sqrt{\frac{8n^2}{3m^3}} = \frac{-2n\sqrt{6m}}{3m^2} (n < 0).$$

（2）若被开方数是代数式的和的形式，先因式分解，变形为积的因式，再将因式开方后移到根号外面。

$$\text{如：} \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{a^2b + 2ab + b} = \sqrt{b(a^2 + 2a + 1)} = \sqrt{b(a+1)^2} = |a+1|\sqrt{b}$$

② 二次根式的内移：二次根式的内移实质是将根号外的正因式平方后移到根号里边去，注意“-”号是没法移进去。

将根号外的正因式，平方后移到根号里面去。

$$\text{如：} -a\sqrt{a} = -\sqrt{a^3}; b\sqrt{-\frac{a^2}{b}} = -|a|\sqrt{-b}.$$

二次根式的加减

二次根式的加减

同类二次根式：把几个二次根式化成_____二次根式后，如果_____相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式。

二次根式的加减：实际上就是先把每个二次根式化成_____二次根式，再合并同类二次根式。

【教法备注】

1、同类二次根式：把几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式。

① 同类二次根式类似于整式中的同类项，如 $3\sqrt{2}$ 和 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 是同类二次根式。

② 几个同类二次根式在没有化简之前，被开方数完全可以互不相同，如 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ， $\sqrt{8}$ ， $\sqrt{18}$ 都是同类二次根式。

③ 判断两个二次根式是否是同类二次根式，首先要将它们化为最简二次根式，然后再看被开方数是否相同。

2、二次根式的加减：

二次根式的加减运算实际上就是先把每个二次根式化成最简二次根式，再合并同类二次根式。

二次根式的加减步骤：“一化二找三合并”。

① 一化：将每个二次根式化为最简二次根式；

② 二找：找出同类二次根式；

③ 三合并：合并二次根式。

注意：

① 二次根式加减混合运算的实质就是合并同类二次根式，不是同类二次根式不能合并。

如 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 是最简二次根式，不能合并。

② 二次根式进行加减运算时，根号外的系数因式必须为假分数形式，如 $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ ，不能写成 $1\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 的形式。

③ 合并同类二次根式后，若系数为多项式，需添加括号，如 $(a+b)\sqrt{a}$ 。

|| 例题

13. 下列根式中属于最简二次根式的是（ ）。

A. $\sqrt{a^2+1}$

B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{8}$

D. $\sqrt{27x}$

【答案】A

【解析】A. 该二次根式符合最简二次根式的定义，故本选项正确；

B. 该二次根式的被开方数中含有分母，所以它不是最简二次根式，故本选项错误；

C. 该二次根式的被开方数中含有能开得尽方的因数4，所以它不是最简二次根式，故本选项错误；

D. 该二次根式的被开方数中含有能开得尽方的因素9，所以它不是最简二次根式，故本选项错误。

故选A

【标注】【知识点】最简二次根式

14. 若最简根式 $\sqrt{2b+5}$ 和 $\sqrt{3b-4}$ 是同类二次根式，则 $a \cdot b$ 的值是 _____。

【答案】18

【解析】∵最简根式 $\sqrt{2b+5}$ 和 $\sqrt{3b-4}$ 是同类二次根式，

$$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ 2b + 5 = 3b - 4 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\therefore a \cdot b = 18,$$

故答案为：18。

【标注】【知识点】同类二次根式

【知识点】最简二次根式

【能力】运算能力

【重点强调】

2018~2019学年3月天津河西区天津市新华中学初二下学期月考第14题3分

练习

15. 化简二次根式 $\sqrt{-9x^3}$ 的结果是 ()。

A. $3x\sqrt{-x}$

B. $-3x\sqrt{x}$

C. $3x\sqrt{x}$

D. $-3x\sqrt{-x}$

【答案】D

【解析】 $\sqrt{-9x^3} = \sqrt{3^2 \times (-x)^2(-x)} = -3x \cdot \sqrt{-x}$ 。

故选D。

【标注】【知识点】最简二次根式

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市益中学校初二下学期月考第8题3分

16. 若最简二次根式 $\frac{2}{3}\sqrt{3m^2-2}$ 与 ${}^{n^2-1}\sqrt{4m^2-10}$ 是同类二次根式, 则 m 的值是 _____ .

【答案】 $\pm 2\sqrt{2}$

【解析】 $\because$ 同类二次根式, 根号下完全相同,

$$3m^2 - 2 = 4m^2 - 10,$$

$$m^2 = 8$$

$$, m = \pm 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】最简二次根式

【知识点】同类二次根式

|| 例题

17. 已知 $\sqrt{24n}$ 是整数, 正整数 n 的最小值为 () .

A. 0

B. 1

C. 6

D. 36

【答案】 C

【解析】 $\because \sqrt{24n} = 2\sqrt{6n}$,

$$\therefore n = 6.$$

故选C.

【标注】【知识点】已知二次根式的值为整数确定字母的取值范围

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第5题

18. 计算下列各题.

$$(1) \frac{1}{2}\sqrt{12} \cdot \left(3\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2} \right).$$

$$(2) \sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{2\frac{1}{3}} \times \sqrt{1\frac{2}{5}}.$$

$$(3) \sqrt{48} - \sqrt{54} \div \sqrt{2} + (3 - \sqrt{3}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$(4) (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) - (1 - \sqrt{2})^2.$$

【答案】(1) $3 + \sqrt{6}$.

(2) 1.

(3) $\sqrt{3} + 2$.

(4) $2\sqrt{2} - 1$.

【解析】(1) 原式 = $\frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{12 \times \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \times \sqrt{12 \times 2}$
 $= 3 + \sqrt{6}.$

(2) 原式 = $\sqrt{\frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{5}}$
 $= 1.$

(3) 原式 = $4\sqrt{3} - \sqrt{54} \div 2 + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$
 $= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 - 1$
 $= \sqrt{3} + 2.$

(4) 原式 = $9 - 7 - (1 - 2\sqrt{2} + 2)$
 $= 2 - 3 + 2\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2} - 1.$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的乘除混合运算

【知识点】二次根式的四则混合运算

【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初二下学期期中第19题

练习

19. 能使等式 $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的 x 的取值范围是 ().

A. $x > 2$

B. $x \neq 2$

C. $x \geq 0$

D. $x \geq 2$

【答案】A

【解析】 $\because$ 二次根式具有非负性，

$$\therefore \begin{cases} \frac{x}{x-2} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } x \geq 2,$$

$\therefore$ 分数的分母不能为0,

$\therefore x-2 \neq 0$, 解得 $x \neq 2$,

综上所述, $x > 2$,

故选A.

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市益中学校初二下学期月考第2题3分

20. 若 $\sqrt{75n}$ 是整数, 则正整数 n 的最小值是 _____ .

【答案】 3

【解析】 正整数 n 的最小值是3.

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

【知识点】最简二次根式

【重点强调】

2017~2018学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第15题

21. 回答下面问题:

- (1) $\frac{4}{3}\sqrt{18} \div (2\sqrt{8} \times \frac{1}{3}\sqrt{54})$.
- (2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})$.
- (3) $\frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$.
- (4) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{48}$.
- (5) $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2)^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) $-7 + 6\sqrt{2}$.

(3) 1.

$$(4) 2\sqrt{3}.$$

$$(5) 7 - 2\sqrt{3}.$$

【解析】(1) 原式 $= \frac{4}{3} \times 3\sqrt{2} \div \left(4\sqrt{2} \times \frac{1}{3} \times 3\sqrt{6} \right)$
 $= 4\sqrt{2} \div (4\sqrt{2} \times \sqrt{6})$
 $= \frac{1}{\sqrt{6}}$
 $= \frac{\sqrt{6}}{6}.$

(2) 原式 $= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$
 $= -7 + 6\sqrt{2}.$

(3) 原式 $= \frac{5}{5}(4 + \sqrt{11}) - \frac{4}{4}(\sqrt{11} + \sqrt{7}) - \frac{2}{2}(3 - \sqrt{7})$
 $= 1.$

(4) 原式 $= 4\sqrt{3} + 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \times 4\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3}.$

(5) 原式 $= 2 + (7 - 4\sqrt{3}) - 2 + 2\sqrt{3}$
 $= 7 - 2\sqrt{3}.$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【知识点】二次根式的加减以及混合运算

【知识点】分母、分子有理化

【知识点】二次根式的乘除混合运算

【知识点】平方差公式的计算

【能力】运算能力

【重点强调】

2017~2018学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第23题

|| 例题

22. 当 $x = \sqrt{23} - 1$ 时, 代数式 $x^2 + 2x + 2$ 的值是 _____.

【答案】24

【解析】 $\because x = \sqrt{23} - 1,$

$$\therefore x + 1 = \sqrt{23},$$

$$\therefore (x + 1)^2 = 23, \text{ 即 } x^2 + 2x = 22,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 2 = 22 + 2 = 24 .$$

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-条件化简求值

【重点强调】

2018~2019学年3月天津河西区天津市新华中学初二下学期月考第16题3分v

23. 把下列各式分母有理化：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} .$$

$$(2) \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4} .$$

$$(3) \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2} .$$

【答案】(1) $\sqrt{3} + \sqrt{2} .$

(2) $\sqrt{7} + \sqrt{3} .$

(3) $\frac{11 - 4\sqrt{7}}{3} .$

【解析】(1) 略

(2) 略

(3) 略

【标注】【知识点】分母、分子有理化

24. 把 $(3x - 2)\sqrt{\frac{1}{2 - 3x}}$ 根号外的因式移到根号内后，其结果是 _____ ．

【答案】 $-\sqrt{2 - 3x}$

【解析】由题意得， $2 - 3x > 0$ ，

则 $3x - 2 < 0$ ，

$$(3x - 2)\sqrt{\frac{1}{2 - 3x}} = -\sqrt{\frac{1}{2 - 3x}(2 - 3x)^2} = -\sqrt{2 - 3x} .$$

【标注】【知识点】二次根式的运算

|| 练习

25. 已知 $a = 2\sqrt{2} + 3$ ， $b = 2\sqrt{2} - 3$ ，求：

- (1) $a + b$.
 (2) $a - b$.
 (3) $a^2 + b^2$.
 (4) $a^2 - 2ab + b^2$.

【答案】 (1) $4\sqrt{2}$.

(2) 6 .

(3) 34 .

(4) 36 .

【解析】 (1) 原式 = $2\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{2} - 3 = 4\sqrt{2}$.

(2) 原式 = $2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} - 3 = 6$.

(3) 原式 = $(a + b)^2 - 2ab$
 $= (2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - 3)^2 - 2(2\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 3)$
 $= (4\sqrt{2})^2 - 2 \times [(2\sqrt{2})^2 - 3^2]$
 $= 32 - 2 \times (8 - 9) = 32 + 2 = 34$.

(4) 原式 = $(a - b)^2$
 $= [2\sqrt{2} + 3 - (2\sqrt{2} - 3)]$
 $= 6^2 = 36$.

【标注】 【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河西区卓群中学初二下学期月考第19题8分

26. 阅读下列材料，然后回答问题 .

在进行二次根式的化简与运算时，我们有时会碰上如 $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 一样的式子，其实我们

还可以将其进一步化简： $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{3}-1$,

以上这种化简的步骤叫做分母有理化 .

(1) 化简 $\frac{3}{\sqrt{27}}$.

(2)

化简 $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

(3) 化简: $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

(3) $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1)$.

【解析】(1) $\frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{27} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 化简 $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

(3) 化简: $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$
 $= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$
 $= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1)$.

【标注】【知识点】分母、分子有理化

27. 已知 $\sqrt{x^3 + 3x^2} = -x\sqrt{x+3}$, 则 () .

A. $x \leq 0$

B. $x \leq -3$

C. $x \geq -3$

D. $-3 \leq x \leq 0$

【答案】D

【解析】由题意知 $x+3 \geq 0$ 且 $\sqrt{x^3 + 3x^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x+3} = -x\sqrt{x+3}$, 即 $\sqrt{x^2} = -x$, 故 $-3 \leq x \leq 0$.

【标注】【知识点】二次根式的性质

【重点强调】

2019~2020学年4月天津和平区天津市益中学校初二下学期月考第1题

28. 将下列各式根号外的因式移入根号内:

(1) $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

(2) $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$.

(3) $\frac{a}{a-b}\sqrt{-\frac{(b-a)^2}{a}}$.

【答案】 (1) $-\sqrt{-a}$.

(2) $-\sqrt{1-a}$.

(3) 若 $a-b < 0$ 时 , 原式 $=\sqrt{-a}$; 若 $a-b > 0$ 时 , 原式 $=-\sqrt{-a}$.

【解析】 (1) 略 .

(2) 略 .

(3) 由题 : $a < 0$,

I 若 $a-b < 0$, 原式 $=\sqrt{-a}$;

II 若 $a-b > 0$, 原式 $=-\sqrt{-a}$.

【标注】 【知识点】把根号外的因式化到根号内